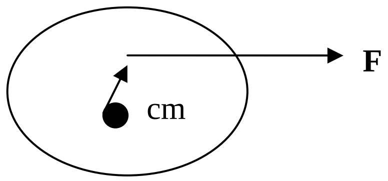
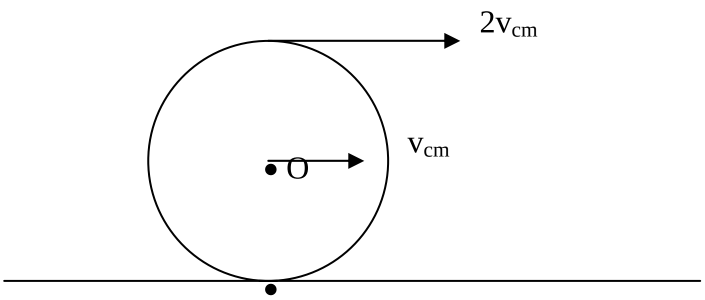
Corpo rigido libero



Le equazioni che valgono sono :
$\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$
$\tau_{R,est} = I\alpha$

Se si sceglie come polo il centro di massa abbiamo due equazioni disaccoppiate in quanto a e α non hanno alcuna relazione. a è l'accelerazione del centro di massa e α è l'accelerazione angolare intorno al centro di massa. Se ad esempio la forza è applicata sul centro di massa si ha $\alpha = 0$.

Rotolamento

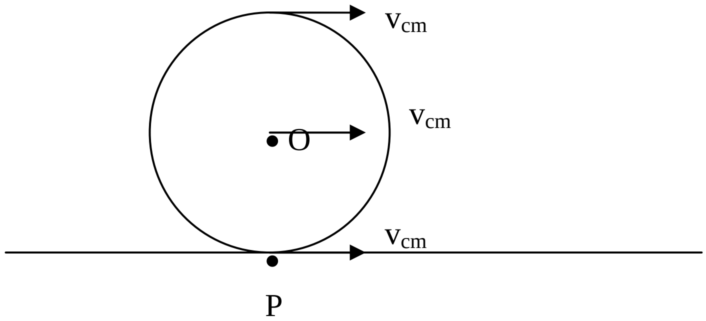


P è fermo

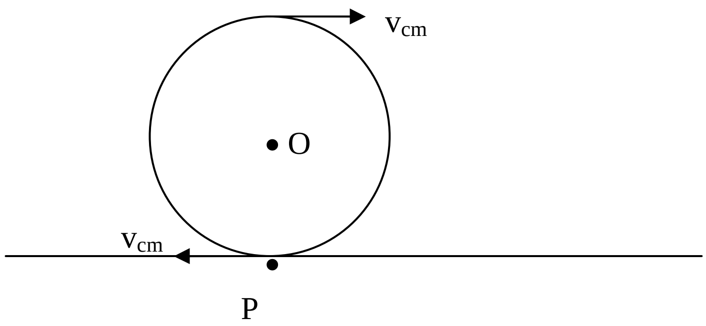
Figura 1

Il rotolamento si può pensare come una rotazione intorno al punto P, istantaneamente fermo, oppure come una rototraslazione. In questo secondo caso è conveniente considerare la rotazione intorno al centro di massa e la traslazione come quella del centro di massa.
In entrambi i casi le equazione sono le solite:
$\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$
$\tau_{R,est} = I\alpha$

in cui $\tau_{R,est}$ e I dipendono dall'asse scelto.
Prima di proseguire dobbiamo notare che, se pensiamo al rotolamento come insieme di rotazione e traslazione, si ha una relazione stretta tra velocità angolare e velocità di traslazione del cm e tra accelerazione angolare e accelerazione del cm.



Nella traslazione tutti i punti si muovono come il centro di massa.



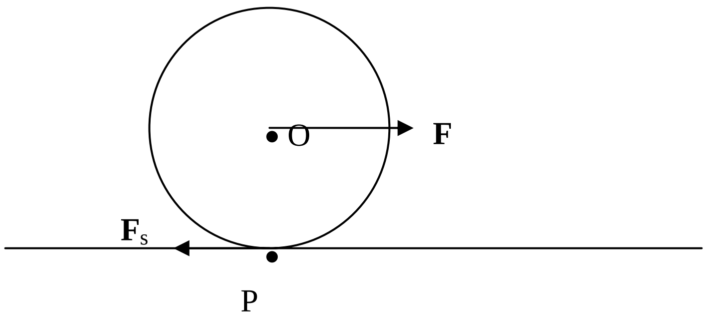
Nella rotazione il centro di massa è fermo e la velocità dei punti sul bordo è quella del cm. Questo perché se si considera che il punto P è fermo troviamo che la velocità della rotazione di P e quella della sua traslazione sono uguali e opposte e uguali in modulo a quella del cm.
Il risultato finale è una distribuzione delle velocità come in Figura 1.

Energia cinetica nel rotolamento
L'energia cinetica di un corpo rigido è data dalla somma della energia cinetica traslazionale del centro di massa e dell'energia cinetica rotazionale intorno al centro di massa. (In realtà ciò vale per qualunque punto scelto come polo).

$EC = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$ (Ricordiamo che ω non è un vettore applicato ed è lo stesso qualunque sia il polo scelto.)

Nel caso di puro rotolamento $v_{cm} = \omega R$ e quindi $EC = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \frac{v^2}{R^2}$, cioè esiste una relazione tra l'energia cinetica traslazionale e quella rotazionale. La ripartizione dell'energia cinetica tra le due forme dipende dal momento di inerzia. Nel caso di un cerchione, poiché $I=MR^2$, la ripartizione è 50% e 50%, nel caso di un disco ($I=1/2\ MR^2$) è 1/3 rotazionale e 2/3 traslazionale ecc.

Rotolamento sotto l'azione di una forza



Supponiamo che ci sia una forza che "tira" applicata al centro di massa. Se non ci fossero atre forze applicate al corpo, esso traslerebbe. Se il corpo è appoggiato su un piano con attrito allora esso ruota. Questo può avvenire solo se c'è un'altra forza che lo faccia ruotare. Questa forza è data dall'attrito statico, nel caso di puro rotolamento.
Se, supponendo di conoscere la massa del corpo, il suo raggio e la forza **F,** vogliamo ricavare l'accelerazione (a o α è equivalente in quanto vale nel rotolamento che $a = \alpha R$) possiamo scrivere le solite due equazioni:

$\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$
$\tau_{R,est} = I\alpha$

Ora possiamo pensare o una rotazione intorno a P oppure una rototraslazione intorno al centro centro di massa e del centro di massa, O. Risolviamo in entrambi i modi e vediamo che il risultato è lo stesso.

Rotazione intorno a P

Per trovare l'accelerazione è sufficiente la seconda equazione. (Naturalmente vale sempre la prima equazione cardinale e cioè $\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$.)
$\tau_{R,est,P} = I_P \alpha$
Ma il momento della forza è solo quello di F in quanto il momento della forza di attrito è nullo rispetto a P. E quindi si ha $\tau = RF$ e $I_P = I_{cm} + MR^2$ e cioè
$RF = \left(I_{cm} + MR^2\right)\alpha$ da cui si ricava α e quindi a.
Dalla prima equazione abbiamo $F - F_{Fs} = Ma$ e poiché ora conosciamo l'accelerazione possiamo ricavare F_s. Se il risultato fosse una forza di attrito statico maggiore della massima forza di attrito statico tra piano e corpo allora questo "slitterebbe" e il problema andrebbe risolto in modo diverso.

Rototraslazione intorno a o=cm

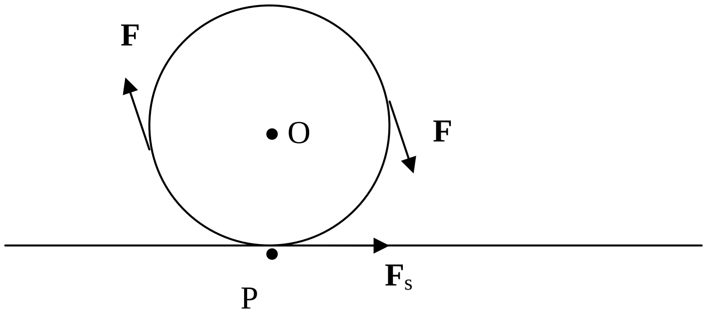
Le due equazioni:
$\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$
$\tau_{R,est} = I\alpha$

diventano:
$F - F_s = Ma_{cm}$
$RF_s = I_{cm}\alpha$
e poi ricordiamo che $a = \alpha R$

Da queste ricaviamo a e F_s.

Rotolamento sotto l'azione di una coppia di forze

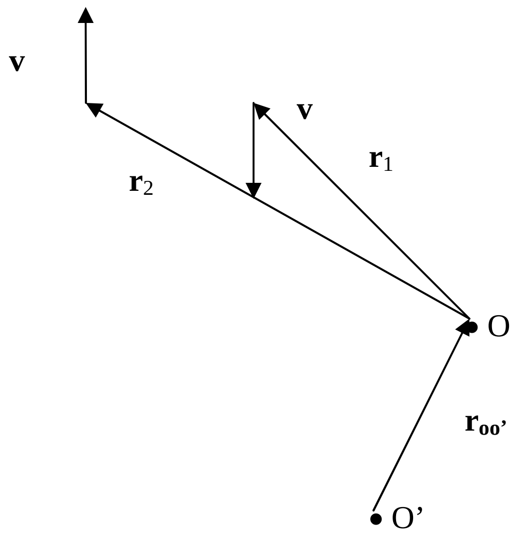
Se il rotolamento avviene per una forza che tira, allora la forza di attrito statico, F_s, è diretta in verso opposto alla forza F, come nelle figure precedenti. Questo perché il punto della ruota in contatto con P tende ad andare avanti.



Se invece il motore esercita una coppia di forze, allora il punto della ruota in contatto con P tende ad andare indietro e quindi la forza di attrito è diretta in verso opposto al caso precedente e cioè nel verso del moto. Questo deriva anche dalla prima equazione cardinale secondo cui $\mathbf{F}_{R,est} = M\mathbf{a}_{cm}$. Infatti, poiché la coppia di forze ha risultante nulla, è necessario che la forza di attrito sia nella direzione dell'accelerazione.

Momento di una coppia di vettori

Il momento di una coppia di vettori è indipendente dal polo.



Il momento totale rispetto a O è
$\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2$ e tenendo conto che i due momenti sono opposti si può scrivere
$\left|\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1\right| - \left|\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2\right|$
Il momento rispetto a O' si può scrivere
$\left|\left(\vec{r}_{oo'} + \vec{r}_1\right) \wedge \vec{v}_1\right| - \left|\left(\vec{r}_{oo'} + \vec{r}_2\right) \wedge \vec{v}_2\right| = \left|\vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1\right| - \left|\vec{r}_2 \wedge \vec{v}_2\right|$
che è uguale al momento rispetto a O.